Lemma 1.59: $F : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^k$ lipschitzovské. Pak F je spojité. $\left[\delta := \frac{\varepsilon}{L} \right]$

Definice 1.57: $\exists L \in \mathbb{R}$ (lip. konstanta F):
$\forall x, y \in \mathbb{R}^d : \| F(x) - F(y) \|_2 \leq L \cdot \| x - y \|_2$

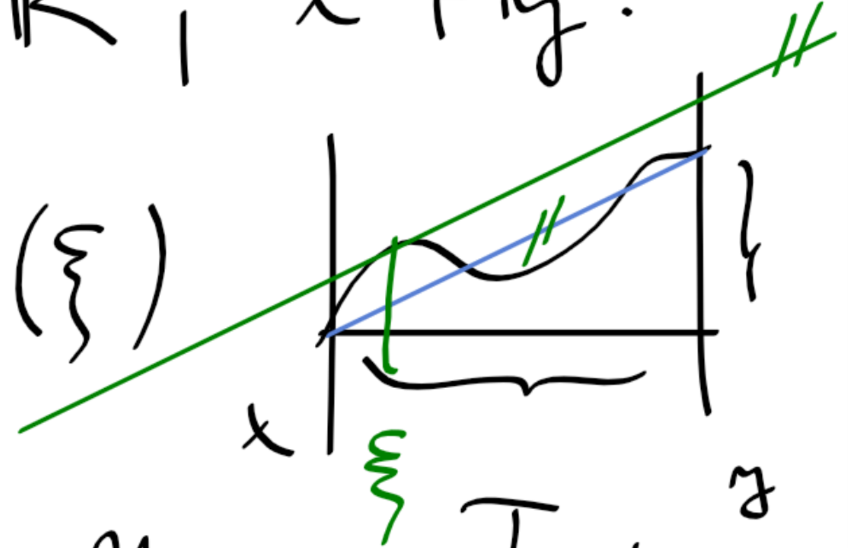
Příklady 1.60: Nechť • $f(x) = 3x - 2$; $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$|f(x) - f(y)| = |3x - 2 - (3y - 2)| = 3|x - y|$

Tím spíš $\leq 3|x-y| \Rightarrow f$ je 3-lip.

• $g(x) = \sin x$; Vol $x, y \in \mathbb{R}$, $x \neq y$.

$$\frac{\sin x - \sin y}{x - y} \overset{\text{Lagr. V.}}{=} \sin'(\xi)$$



pro nějaké ξ ostře mezi x a y. Tedy

$$\left| \frac{\sin x - \sin y}{x - y} \right| = |\sin'(\xi)| = |\cos(\xi)| \leq 1$$

$$|\sin x - \sin y| \leq 1 \cdot |x - y| \Rightarrow \sin \text{ je 1-lip.}$$

Připomeň: $f' > 0$ na (a,b), pak f je tam rost.

Nechť $x < y$, $x, y \in (a,b)$. Chci $f(x) < f(y)$.

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(\xi) > 0, \ \xi \in (x,y) \subseteq (a,b)$$

$$\Rightarrow \frac{f(y) - f(x)}{y - x} > 0, \text{ ovšem } y - x > 0.$$

$f(y) - f(x) > 0$, tj. $f(y) > f(x)$. ⊠

Tvrzení 1.61: Buď $I \subseteq \mathbb{R}$ interval, $f : I \to \mathbb{R}$ spojitá, $|f'(x)| \leq L$, $x \in I$. Pak f je L-lipschitzovská.

Dk.: $\left| \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \right| = |f'(\xi)| \leq L$. ⊠

Pozn. 1.62: lip. $\Rightarrow \exists$ derivace „s.v." (až na množinu Lebesgueovy míry 0.)

Lemma 1.63: $k \in \{1, \dots, d\}$, $\pi_k : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$:

$\pi_k((x_1, x_2, \dots, x_d)) = x_k$.

Pak π_k je 1-lip. (a tedy spojitá).

Důkaz: Vol $x, y \in \mathbb{R}^d$

$$|\pi_k(x) - \pi_k(y)| = |x_k - y_k| = \sqrt{(x_k - y_k)^2} \leq$$

$$\leq \sqrt{\sum_{i=1}^{d} (x_i - y_i)^2} = \|x - y\|_2.$$

(Podobně $\|\cdot\|_p$) Tedy π_k je 1-lip. ☒

Příklad 1.64: (Spojitost polynomů ve více prom.)

$h(x, y) = xy^2 + 2x + y + 6$.

Cv. Konstantní fce (hrany $c(x, y) = c \in \mathbb{R}$) je spojitá na $\mathbb{R}^2$, podobně na $\mathbb{R}^d$.

[$\varepsilon > 0$ dáno $\rightsquigarrow$ $\delta = 729$ funguje.]

- $(x, y) \mapsto x$ (π_1) je spoj.
- $(x, y) \mapsto y$ (π_2) je spoj.
- $x \cdot y$, $x \cdot y^2$ spoj.
- 2 je spoj.
- $2 \cdot x$ –"–
- 6 je spoj.
- Tedy $xy^2 + 2x$ je spoj.
  –"– $xy^2 + 2x + y$ –"–
  –"– $xy^2 + 2x + y + 6$ –"–. ☒

Analogicky pro libovolný polynom na $\mathbb{R}^d$.

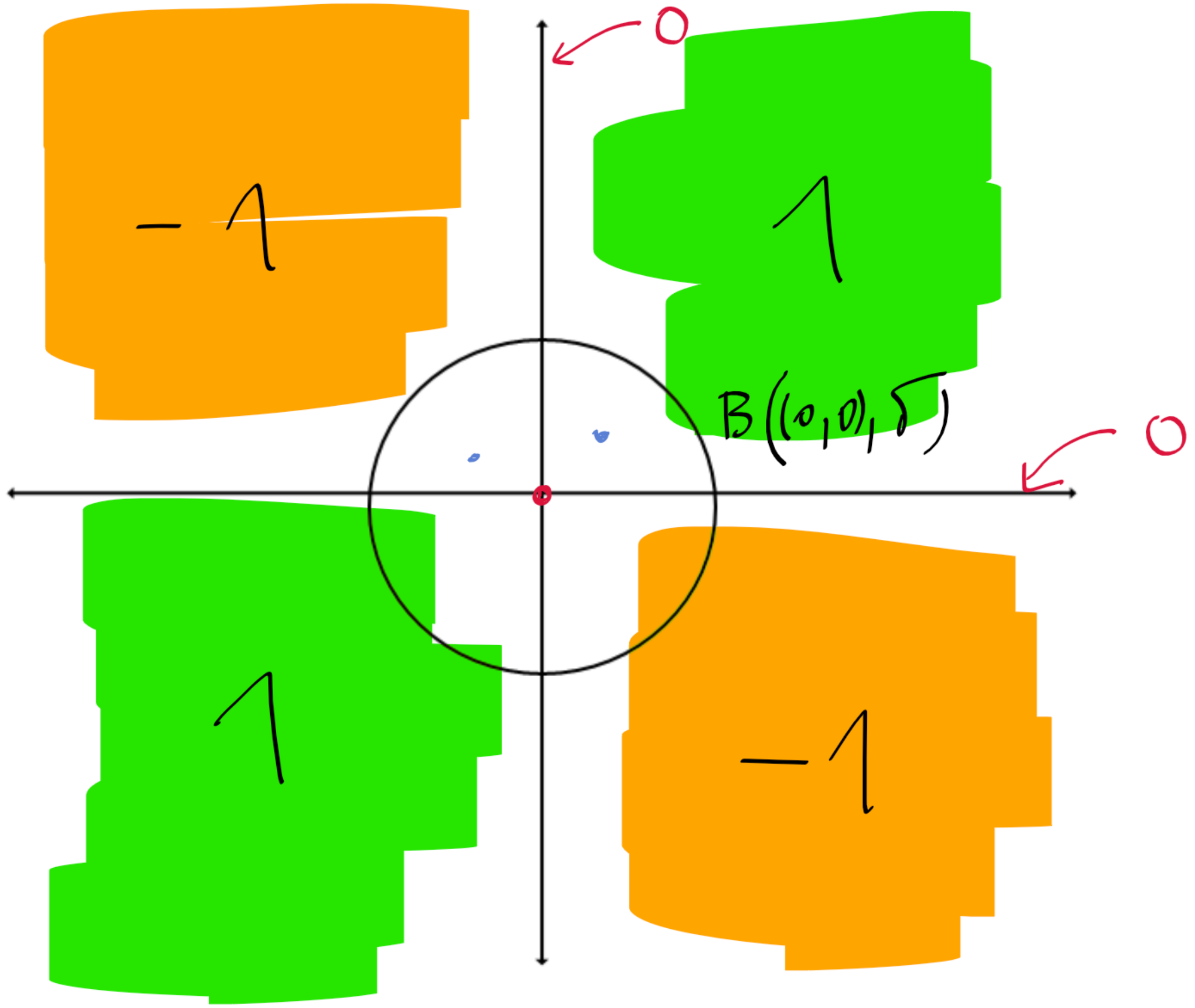
Lemma 1.65: $\|\cdot\|$ na $\mathbb{R}^d$ je 1-lip.:

Dk: $\big| \|x\| - \|y\| \big| \leq 1 \cdot \|x - y\|$

Cv. na Δ-nerovnost. (Viz skripta). ☒

DERIVACE FCÍ VÍCE PROMĚNNÝCH — TOTÁLNÍ DIFERENCIÁL (TD)

Příklad 1.67: $f(x,y) = \mathrm{sgn}(xy)$



$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$

ale f není v bodě $(0,0)$ spojitá.

náznak: Chci:

$\neg\left(\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0\ \forall (x,y)\in B((0,0),\delta) : |f(x,y) - \overbrace{f(0,0)}^{0}| < \varepsilon\right)$

$\Leftrightarrow \exists \varepsilon>0\ \forall \delta>0\ \exists (x,y)\in B((0,0),\delta) : |f(x,y)| \geq \varepsilon$

$\varepsilon = \frac{1}{2}$. $\delta>0$ buďiž dáno. Zbytek sami. ⊠

Poučení: PD nevypovídají o chování fce tolik, co obyčejná der. v dimenzi $d=1$.

Tvrzení 1.68: f z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$ má v bodě $a\in\mathbb{R}$ vlastní derivaci (tj. $f'(a)\in\mathbb{R}$), pak f je spoj. Dk.: povinné opakování. ⊠

Připomeňme, že tečna je $T_1^{f,a}(x) =$

$= f(a) + f'(a)(x-a)$ ... tečna.

Tečna je jediná přímka (lin. fce) splň.:

$$f(x) - T_1(x) = o(x-a),\ x \to a,\ \text{tj.}$$

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - T_1(x)}{x-a} = 0 \quad (\text{definice „}o\text{"})$$

Tj. $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{f(x) - (f(a) + f'(a)(x-a))}{x-a} =$

TD

$$= \lim_{x\to a} \frac{[f(x) - f(a)] - [(f'(a)x - f'(a)a)]}{x-a} = 0$$

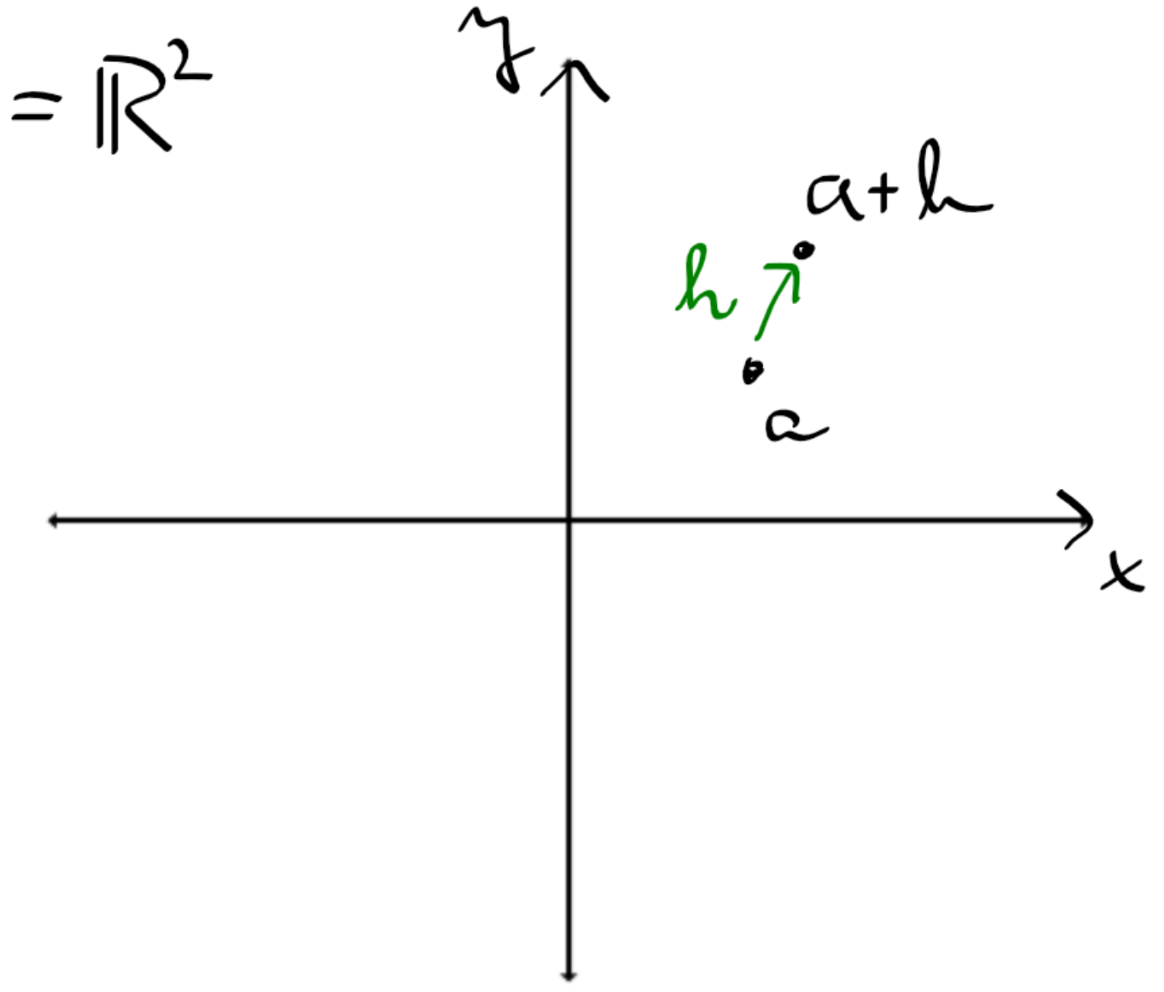
„$h = x-a$"

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - f'(a)\cdot h}{h} \quad \text{TD}$$

Lineární fce popisující chování f u a.

$$L(h) := f'(a)\cdot h.$$

$D_f = \mathbb{R}^2$



$$f(a+h) - f(a) = ?$$

$$\approx L(h)$$

lineární na vektorech

LINEÁRNÍ FORMY (vsuvka)

Připomeňme: X, Y VP, $L: X \to Y$ je lin.

$\forall u, v \in X \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{T} (= \mathbb{R})$:

$$L(\alpha u + \beta v) = \alpha L(u) + \beta L(v).$$

Lineární formy jsou lin. zobrazení do $\mathbb{T}$.

$L: X \to \mathbb{T}$ (kde X je VP nad $\mathbb{T}$)

lineární se nazývá LF.

Pro nás: $L: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$.

Jak L působí na $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$?

$\vec{e}^1 = (1, 0, 0 \dots, 0)$, $\vec{e}^2 = (0, 1, 0, \dots, 0) \dots, \vec{e}^d \dots$

(kanonická báze $\mathbb{R}^d$).

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^{d} x_i \vec{e}^i \quad \text{(triviální)}.$$

$$L(x) = L\left(\sum_{i=1}^{d} x_i e^i\right) = \sum_{i=1}^{d} x_i \cdot \underbrace{L(e^i)}_{\alpha_i}$$

$$\alpha_1 = L(e^1), \quad \alpha_2 = L(e^2), \dots, \alpha_d = L(e^d).$$

$$L((x_1, x_2, \dots, x_d)) = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_d x_d$$

$$= \langle (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d), (x_1, x_2, \dots, x_d) \rangle.$$

$\uparrow$ koeficienty formy L

$$[L] = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_d \end{pmatrix}$$

vektory jsou sloupce: $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix}$

$$L(\vec{x}) = [L] \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix}$$

$$\boxed{L(\cdot) = \langle \alpha, \cdot \rangle}$$

Definice 1.69 (TD fce d prom.) Buďte

$f: D_f \subseteq \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ fce, $a \in \mathbb{R}^d$, L LF.

Řekneme, že L je TD f v bodě a, pokud

$$\left[\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - L(h)}{\|h\|} = 0\right]$$

definováno (18.3.) předevčírem (20.3.2025)

Pozn.: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Pak tedy

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - \overbrace{f'(a) \cdot h}^{L(h)}}{h} = 0$$

ex.-li $df(a)$, říkáme, že f je v bodě a diferencovatelná.

Značení 1.70: TD fce f v bodě a značíme

$df(a)$, popř. $\boxed{f'(a)}$. Pak:

$df(a): \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ je LF.

$f'(a): \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ je LF.

Poznámka 1.71: Ekviv. def.

$$f(a+h) - f(a) - L(h) = o(\|h\|), \ h \to 0$$

Věta 1.72: (Koeficienty TD jsou PD). Buď

$f: D_f \subseteq \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, která má v bodě $a \in \mathbb{R}^d$ TD.

Pak označme $[df(a)] = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_d)$.

Pak existují všechny 1. PD fce f a platí

$$\alpha_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a), \quad i = 1, \ldots, d. \ [\alpha_i \in \mathbb{R}]$$

Pozn. 1.73: Pro $h = (h_1, \dots, h_d)$

$$\underbrace{df(a)(h)}_{L(h)} = \sum_{i=1}^{d} \underbrace{\boxed{\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)}}_{\alpha_i} \cdot h_i$$

To je lineární část přírůstku fce f při kroku h z bodu a $(f(a+h) - f(a))$.

Důkaz: nechť ex. $df(a) =: L$,

$[L] =: (\alpha_1 \ \alpha_2 \ \dots \ \alpha_d)$.

$L(h) = \sum_{i=1}^{d} \boxed{\alpha_i} h_i$. Počítejme z definice ~~PD~~

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a+te_i) - f(a)}{t} =$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{f(a+te_i) - f(a) - L(te_i) + L(te_i)}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{f(a+te_i) - f(a) - L(te_i)}{t} + \lim_{t \to 0} \frac{tL(e_i)}{t}$$

$$= L(e_i) + \lim_{t \to 0} \boxed{\frac{f(a+te_i) - f(a) - L(te_i)}{\|te_i\|}} \cdot \underbrace{\frac{\|te_i\|}{t}}$$

$= \alpha_i + \boxed{\text{„}0\text{"}} \cdot \text{omezená}$

$\left[\ \operatorname{sgn} t = \frac{|t|}{t} = \frac{|t| \cdot \|e_i\|}{t} \right.$ omezená $\left. \right]$

$= \alpha_i + 0 = \alpha_i$

$\boxed{}$: nulová z def. TD

$\boxed{\text{VOLSF}}$: vnější fce $P(h) = \frac{f(a+h) - f(a) - L(h)}{\|h\|}$

vnitřní fce $g(t) = te_i$ $\quad g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d$.

$\forall t \neq 0 : g(t) \neq (0, 0, \dots, 0)$. (P) ✓ $\overset{\text{def TD}}{\Rightarrow}$ $\lim_{h \to 0} P(h) = 0$ $\boxtimes$